

Koordinátageometria Megoldások

- 1) Adott két pont: $A\left(-4; \frac{1}{2}\right)$ és $B\left(1; \frac{3}{2}\right)$ Írja fel az AB szakasz felezőpontjának koordinátáit! (2 pont)

Megoldás:

$$AB \text{ felezőpontja legyen } F. \quad F\left(\frac{-4+1}{2}; \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2}\right) = F\left(-\frac{3}{2}; 1\right) \quad (2 \text{ pont})$$

- 2) Egy kör sugarának hossza 4, középpontja a $B(-3;5)$ pont. írja fel a kör egyenletét! (2 pont)

Megoldás:

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 16, \text{ vagy } x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0 \quad (2 \text{ pont})$$

- 3) Írja fel a $(-2;7)$ ponton átmenő, $\underline{n}(5;8)$ normálvektorú egyenes egyenletét! (2 pont)

Megoldás:

$$5x + 8y = -10 + 56 \quad (1 \text{ pont})$$

$$5x + 8y = 46 \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 2 pont

- 4) Adottak az $\underline{a} = (6;4)$ és az $\underline{a} - \underline{b} = (11;5)$ vektorok. Adja meg a \underline{b} vektort \underline{a} koordinátáival! (3 pont)

Megoldás:

$$6 - b_1 = 11 \quad (1 \text{ pont})$$

$$4 - b_2 = 5 \quad (1 \text{ pont})$$

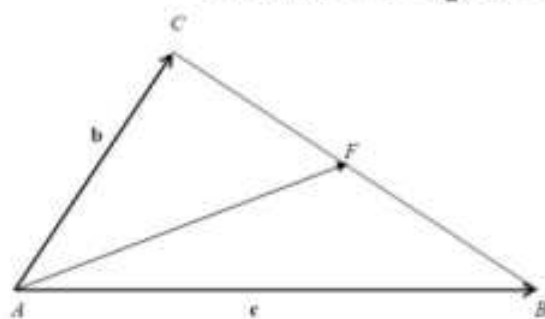
$$\underline{b}(-5; -1) \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 3 pont

- 5) Az ABC háromszög két oldalának vektora $\underline{AB} = \underline{c}$ és $\underline{AC} = \underline{b}$. Fejezze ki ezek segítségével az A csúcsból a szemközti oldal F felezőpontjába mutató \underline{AF} vektort! (2 pont)

Megoldás:

$$\underline{AF} = \frac{\underline{b} + \underline{c}}{2} \quad (2 \text{ pont})$$



Összesen: 2 pont

- 6) Egy négyzet oldalegyenesesei a koordinátatengelyek és az $x = 1$, valamint az $y = 1$ egyenletű egyenesek.

a) Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben a négyzetet, és adja meg csúcsainak koordinátáit! (2 pont)

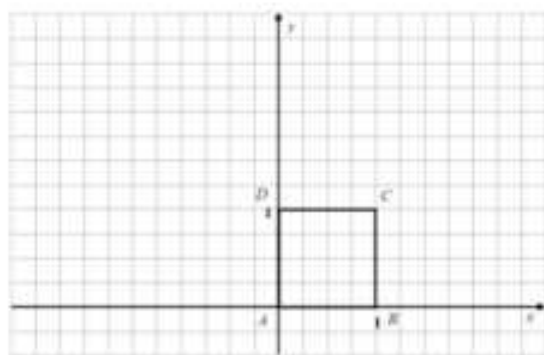
b) Írja fel a négyzet köré írható kör egyenletét! (5 pont)

c) Állapítsa meg, hogy a négyzet kerülete hány százaléka a kör kerületének? (2 pont)

d) Az $y = -4x + 2$ egyenletű egyenes a négyzetet két részre bontja. Számítsa ki e részek területének arányát! (8 pont)

Megoldás:

a)



A csücszpontok koordinátái: $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$.

(1 pont)

(1 pont)

b) A kör középpontja: $K\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

(1 pont)

A kör sugara: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2 pont)

A kör egyenlete: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

(2 pont)

c) *Lásd: Síkgeometria 60. feladat*

d) L rajta van az $y=1$ és az $y=-4x+2$ egyenesek metszéspontján.

(1 pont)

Így $L\left(\frac{1}{4}; 1\right)$,

(1 pont)

ezért $DL = \frac{1}{4}$

(1 pont)

Az AEDL trapéz területe $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{2} \cdot 1 = \frac{3}{8} \cdot 1 = \frac{3}{8}$

(2 pont)

Az EBCL trapéz területe $\frac{5}{8}$

(2 pont)

A két terület aránya 3 : 5

(1 pont)

Összesen: 17 pont

7) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(3; -5)$ ponton és párhuzamos a $4x + 5y = 0$ egyenletű egyenessel! (3 pont)

Megoldás:

$$4x + 5y = -13$$

(3 pont)

Összesen: 3 pont

8) Egy rombusz átlóinak hossza 12 és 20. Számítsa ki az átlóvektorok skalárszorzatát! Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

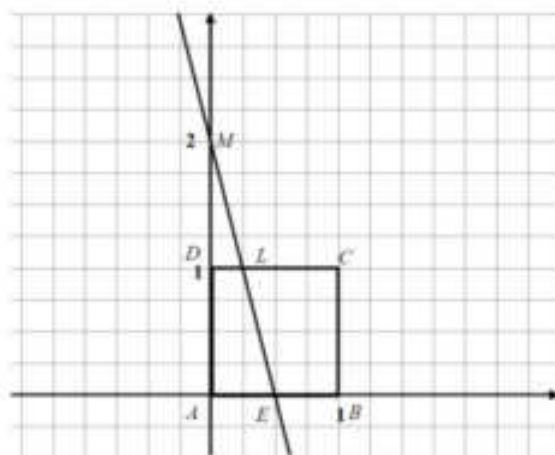
Az átlóvektorok merőlegesek egymásra, ezért a skalárszorzat értéke 0 .

(1 pont)

(2 pont)

Összesen: 3 pont

9) a) Ábrázolja koordináta-rendszerben az e egyenest, melynek egyenlete $4x + 3y = -11$.



Számítással döntse el, hogy a $P(100; -36)$ pont rajta van-e az egyenesen! Az egyenesen levő Q pont ordinátája (második koordinátája) 107.

Számítsa ki a Q pont abszcisszáját (első koordinátáját)! (4 pont)

b) Írja fel az AB átmérőjű kör egyenletét, ahol $A(-5; 3)$ és $B(1; -5)$.

Számítással döntse el, hogy az $S(1; 3)$ pont rajta van-e a körön!

(7 pont)

c) Adja meg az ABC háromszög C csúcsának koordinátáit, ha tudja, hogy az $S(1; 3)$ pont a háromszög súlypontja! (6 pont)

Megoldás:

a) Mivel $4 \cdot 100 + 3 \cdot (-36) \neq -11$ ezért a P pont nincs az egyenesen. (1 pont)

Az e egyenes ábrázolása. (1 pont)

A Q pontra: $4x + 3 \cdot 107 = -11$, (1 pont)

ahonnan a Q pont abszcisszája: $x = -83$. (1 pont)

b) Az AB szakasz felezőpontja F . $F(-2; -1)$ (2 pont)

$$r = |AF| = \sqrt{(-2+5)^2 + (-1-3)^2} = 5 \quad (2 \text{ pont})$$

A kör egyenlete: $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 25$ (2 pont)

Mivel $(1+2)^2 + (3+1)^2 = 25$ ezért az S pont rajta van a körön. (1 pont)

c) A C pont koordinátái: $(x_c; y_c)$

$$S \text{ koordinátáira felírható: } 1 = \frac{-5+1+x_c}{3}; \quad 3 = \frac{3+(-5)+y_c}{3} \quad (3 \text{ pont})$$

Ahonnan $x_c = 7$, (1 pont)

$y_c = 11$ (1 pont)

Tehát $C(7; 11)$ (1 pont)

A feladat megoldható vektorműveletekkel is azt az összefüggést felhasználva, hogy a háromszög súlypontja a súlyvonalon az oldalhoz közelebbi harmadolópont.

Összesen: 17 pont

10) Fejezze ki az \underline{i} és a \underline{j} vektorok segítségével a $\underline{c} = 2\underline{a} - \underline{b}$ vektort, ha $\underline{a} = 3\underline{i} - 2\underline{j}$ és $\underline{b} = -\underline{i} + 5\underline{j}$! (3 pont)

Megoldás:

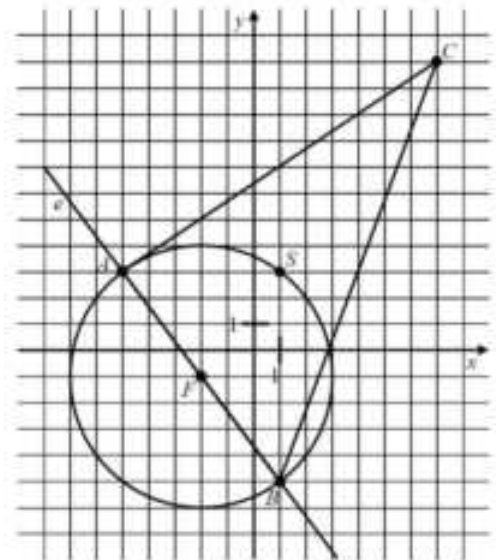
$$\underline{c} = 2\underline{a} - \underline{b}; \quad \underline{c} = 2(3\underline{i} - 2\underline{j}) - (-\underline{i} + 5\underline{j}) \quad (1 \text{ pont})$$

$$\underline{c} = 6\underline{i} - 4\underline{j} + \underline{i} - 5\underline{j} \quad (1 \text{ pont})$$

$$\underline{c} = 7\underline{i} - 9\underline{j} \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 3 pont

11) Az $ABCD$ négyzet középpontja K , az AB oldal felezőpontja F . Legyen $\underline{a} = \overline{KA}$ és $\underline{b} = \overline{KB}$. Fejezze ki az \underline{a} és \underline{b} vektorok segítségével a \overline{KF} vektort! (2 pont)



Megoldás:

$$\overline{KF} = \frac{a+b}{2}$$

(2 pont)

Összesen: 2 pont

12) Adott a koordináta-rendszerben az $A(9;-8)$ középpontú, 10 egység sugarú kör.

a) Számítsa ki az $y = -16$ egyenletű egyenes és a kör közös pontjainak koordinátáit! (8 pont)

b) Írja fel a kör $P(1;-2)$ pontjában húzható érintőjének egyenletét! Adja meg ennek az érintőnek az iránytangensét (meredekségét)! (4 pont)

Megoldás:

a) A kör egyenlete $(x-9)^2 + (y+8)^2 = 100$ (2 pont)

Ebbe behelyettesítve az $y = -16$ -ot:

$$(x-9)^2 = 36$$
 (2 pont)

Az egyenlet megoldva: $x = 15$ vagy $x = 3$ (2 pont)

A közös pontok: $(15;-16)$ és $(3;-16)$ (2 pont)

b) Az érintő normálvektora az \overline{AP} vektor. (1 pont)

$$\overline{AP} = (-8;6)$$
 (1 pont)

Az érintő egyenlete $4x - 3y = 10$ (1 pont)

Az érintő iránytangense $\frac{4}{3}$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

13) Az $A(-7;12)$ pontot egy \underline{r} vektorral eltolva a $B(5;8)$ pontot kapjuk. Adja meg az \underline{r} vektor koordinátáit! (2 pont)

Megoldás:

A keresett vektor: $\underline{r} = (12;-4)$. (2 pont)

14) Jelölje X-szel a táblázatban, hogy az alábbi koordináta-párok közül melyik adják meg a 300° -os irányszögű egységvektor koordinátáit és melyik nem!

	IGEN	NEM
$e\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		
$e\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$		
$e\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		
$e(\sin 30^\circ; -\cos 30^\circ)$		

(4 pont)

Megoldás:

	IGEN	NEM
$e\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		X
$e\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$		X
$e\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	X	
$e(\sin 30^\circ; -\cos 30^\circ)$	X	

(4 pont)

**15) Számítsa ki a következő vektorok skaláris szorzatát!
Határozza meg a két vektor által bezárt szöget!**

$\underline{a}(5; 8) \quad \underline{b}(-40; 25)$

(3 pont)

Megoldás:

A két vektor skaláris szorzata **0**.

(2 pont)

A két vektor szöge **derékszög**.

(1 pont)

Összesen: 3 pont

16) Adott az $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 56 = 0$ egyenletű kör és az $x - 8,4 = 0$ egyenletű egyenes.

a) Számítsa ki a kör és az egyenes közös pontjainak koordinátáit!

(6 pont)

b) Mekkora távolságra van a kör középpontja az egyenestől? (5 pont)

Egy 9 cm sugarú kört egy egyenes két körívre bont. Az egyenes a kör középpontjától 5,4 cm távolságban halad.

c) Számítsa ki a hosszabb körív hosszát! (A választ egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (6 pont)

Megoldás:

a) Megoldandó az $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 56 = 0 \wedge x = 8,4$ egyenletrendszer. (1 pont)

Behelyettesítés után: $y^2 + 8y - 35,84 = 0$ (1 pont)

amelyből $y = 3,2$ vagy $y = -11,2$. (2 pont)

Két közös pont van: $P_1(8,4; 3,2)$, $P_2(8,4; -11,2)$ (2 pont)

b) A kör egyenlete átalakítva: $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 81$ (1 pont)

A kör középpontja $C(3; -4)$ (és sugara 9) (1 pont)

Az egyenes párhuzamos az ordinátatengellyel, (1 pont)

ezért a $C(3; -4)$ pontból az egyenesre bocsátott merőleges talppontja

$T(8,4; -4)$ (1 pont)

Az egyenes $TC = 8,4 - 3 = 5,4$ egység távolságra van a kör középpontjától.

(1 pont)

c) Helyes ábra (1 pont)

A CFP derékszögű háromszögből: $\cos \alpha = \frac{5,4}{9} = 0,6$ (1 pont)

tehát $\alpha \approx 53,13^\circ$ (1 pont)

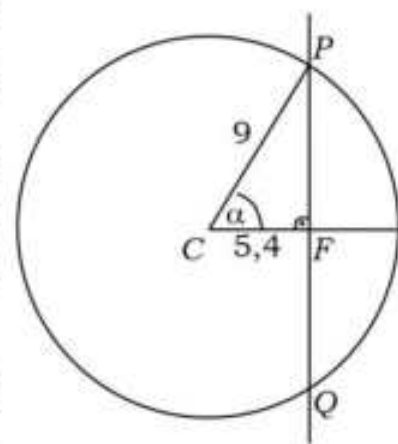
A PQ hosszabb körívhez tartozó középponti szög
 $360^\circ - 2\alpha \approx 253,74^\circ$ (1 pont)

A körív hossza:

$$\frac{2 \cdot 9 \cdot \pi \cdot 253,74}{360} \approx 39,9 \quad (1 \text{ pont})$$

A hosszabb PQ körív hossza kb. **39,9 cm.** (1 pont)

A feladat megoldható a rövidebb PQ körívhez tartozó 2α középponti szög kiszámításával, majd ebből a körív hosszának meghatározásával is.



Összesen: 17 pont

17) Az ABC háromszög csúcpontjainak koordinátái: $A(0;0)$, $B(-2;4)$, $C(4;5)$.

a) Írja fel az AB oldal egyenesének egyenletét! (2 pont)

b) Számítsa ki az ABC háromszög legnagyobb szögét! A választ tized fokra kerekítve adja meg! (7 pont)

c) Számítsa ki az ABC háromszög területét! (3 pont)

Megoldás:

a) Az egyenes átmegy az origón $m = \frac{4}{-2} = -2$, (1 pont)

Egyenlete: $y = -2x$ (1 pont)

b) A háromszög legnagyobb szöge a legnagyobb oldallal szemben van (vagy mindhárom szöget kiszámolja). (1 pont)

Az oldalhosszúságok: $AB = \sqrt{20}$, $AC = \sqrt{41}$, $BC = \sqrt{37}$. (2 pont)

Az AC -vel szemben levő szög legyen β .

Alkalmazva a koszinusztételt: (1 pont)

$$41 = 20 + 37 - 2\sqrt{20 \cdot 37} \cos \beta \quad (1 \text{ pont})$$

$$\cos \beta \approx 0,2941, \quad (1 \text{ pont})$$

$$\beta \approx 72,9^\circ \quad (1 \text{ pont})$$

c) A háromszög egy területképlete: $t = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin \beta}{2}$ (1 pont)

$$t = \frac{\sqrt{20 \cdot 37} \cdot \sin 72,9^\circ}{2}. \quad (1 \text{ pont})$$

A háromszög területe **13** (területegység). (1 pont)

Összesen: 12 pont

18) Három egyenes egyenlete a következő (a és b valós számokat jelölnek):

$$e: y = -2x + 3$$

$$f: y = ax - 1$$

$$g: y = bx - 4$$

Milyen számot írjunk az a helyére, hogy az e és f egyenesek párhuzamosak legyenek?

Melyik számot jelöli b , ha a g egyenes merőleges az e egyenesre? (3 pont)

Megoldás:

$$a = -2 \quad (1 \text{ pont})$$

$$b = \frac{1}{2} \quad (2 \text{ pont})$$

Összesen: 3 pont

- 19) Egy kör az $(1;0)$ és $(7;0)$ pontokban metszi az x tengelyt. Tudjuk, hogy a kör középpontja az $y = x$ egyenletű egyenesre illeszkedik. Írja fel a kör középpontjának koordinátáit! Válaszát indokolja! **(3 pont)**

Megoldás:

A középpont a húr felező merőlegesén van, (1 pont)

így az első koordinátája 4. (1 pont)

A középpont: $O(4;4)$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

- 20) Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-3;2)$, $B(3;2)$ és $C(0;0)$.
- a) Számítsa ki az ABC háromszög szögeit! **(5 pont)**
- b) Írja fel az ABC háromszög körülírt körének egyenletét! **(7 pont)**

Megoldás:

- a) Az ABC háromszög egyenlő szárú. (1 pont)

Az AB alapon fekvő hegyesszögek tangense $\frac{2}{3}$ (2 pont)

tehát az alapon fekvő szögek nagysága $33,7^\circ$, (1 pont)

a szárak szöge pedig $112,6^\circ$. (1 pont)

- b) A körülírt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek közös pontja, ez a szimmetria miatt az ordinátatengelyen van. (1 pont)

Az AC oldal felezőmerőlegese átmegy a $(-1,5;1)$ felezőponton. (1 pont)

Az AC oldal felezőmerőlegesének egy normálvektora a CA , (1 pont)

$CA(-3;2)$. (1 pont)

Az AC oldal felezőmerőlegesének egyenlete: (1 pont)

$$-3x + 2y = 6,5. \quad (1 \text{ pont})$$

Ez az y tengelyt a $(0;3,25)$ pontban metszi (ez a körülírt kör középpontja).

A kör sugara $3,25$. (1 pont)

A körülírt kör egyenlete: $x^2 + (y - 3,25)^2 = 3,25^2$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

- 21) Adott két egyenes: $e: 5x - 2y = -14,5$, $f: 2x + 5y = 14,5$.
- a) Határozza meg a két egyenes P metszéspontjának koordinátáit! **(4 pont)**
- b) Igazolja, hogy az e és az f egyenesek egymásra merőlegesek! **(4 pont)**
- c) Számítsa ki az e egyenes x tengellyel bezárt szögét! **(4 pont)**

Megoldás:

- a) (A két egyenes egyenletéből alkotott egyenletrendszer megoldása adja a P koordinátáit.)

Az első egyenletből: $y = 2,5x + 7,25$. (1 pont)

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe és rendezve $x = -1,5$. (1 pont)

$y = 3,5$ (1 pont)

Tehát $P(-1,5;3,5)$. (1 pont)

b) Az egyenesek meredeksége: $m_e = \frac{5}{2}$ (1 pont)

$$m_f = -\frac{2}{5} \quad (1 \text{ pont})$$

A meredekségek szorzata -1 , (1 pont)

tehát a két egyenes **merőleges**. (1 pont)

A feladat megoldható a normálvektorok skaláris szorzatát megvizsgálva is.

c) Az e egyenes meredeksége $2,5$, tehát az egyenes x tengellyel bezárt α szögére igaz, hogy $\operatorname{tg}\alpha = 2,5$. (3 pont)

Ebből $\alpha = 68,2^\circ$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

22) Írja fel annak az e egyenesnek az egyenletét, amelyik párhuzamos a $2x - y = 5$ egyenletű f egyenessel és áthalad a $P(3; -2)$ ponton! Válaszát indokolja! (2 pont)

Megoldás:

Az f egyenes meredeksége 2 , így az e egyenes meredeksége is 2 .

$$m(x - x_0) = y - y_0$$

$$y = 2x - 8 \quad (2 \text{ pont})$$

23) Adja meg az $(x + 2)^2 + y^2 = 9$ egyenletű kör K középpontjának koordinátáit és sugarának hosszát! (3 pont)

Megoldás:

$$K(-2; 0) \quad (2 \text{ pont})$$

$$r = 3 \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: (3 pont)

24) Adja meg a $2x + y = 4$ egyenletű egyenes és az x tengely M metszéspontjának a koordinátáit, valamint az egyenes meredekségét! (3 pont)

Megoldás:

A metszéspont $M(2; 0)$. (2 pont)

Az egyenes meredeksége -2 . (1 pont)

Összesen: 3 pont

25) A PQR háromszög csúcsai: $P(-6; -1)$, $Q(6; -6)$ és $R(2; 5)$.

a) Írja fel a háromszög P csúcsához tartozó súlyvonal egyenesének egyenletét! (5 pont)

b) Számítsa ki a háromszög P csúcsnál lévő belső szögének nagyságát! (7 pont)

Megoldás:

a) A kérdéses súlyvonalra a P csúcs és a vele szemközti oldal felezőpontja illeszkedik. (1 pont)

A QR szakasz felezőpontja $F(4; -0,5)$. (1 pont)

A súlyvonal egy irányvektora: $\overrightarrow{PF}(10; 0,5)$. (1 pont)

A súlyvonal egyenlete: $x - 20y = 14$. (2 pont)

- b) (A kérdéses szöveget a háromszög oldalvektorai skalárszorzatának segítségével lehet meghatározni.) Az oldalvektorok $PQ(12;-5)$ és $PR(8;6)$. (2 pont)

A két vektor skalárszorzata a koordinátákból: $\overline{PQ} \cdot \overline{PR} = 12 \cdot 8 + (-5) \cdot 6 = 66$ (1 pont)

Az oldalvektorok hossza $|\overline{PQ}| = 13$ és $|\overline{PR}| = 10$ (1 pont)

A két vektor skalárszorzata a definíció szerint: $(\overline{PQ} \cdot \overline{PR}) = 66 = 13 \cdot 10 \cdot \cos \alpha$, ahol α a két vektor által bezárt szöveget jelöli. (1 pont)

Innen: $\cos \alpha \approx 0,5077$ (1 pont)

$\alpha = 59,5^\circ$ (mivel $0^\circ < \alpha < 180^\circ$) (1 pont)

Összesen: 12 pont

- 26) Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-2;-1)$, $B(9;-3)$, és $C(-3;6)$.

a) Írja fel a BC oldal egyenesének egyenletét! (3 pont)

b) Számítsa ki a BC oldallal párhuzamos középvonal hosszát! (3 pont)

c) Számítsa ki a háromszögben a C csúcsnál lévő belső szög nagyságát! (6 pont)

Megoldás:

- a) A BC oldalegyenes egy irányvektora a $\overline{BC}(-12;9)$ vektor. (1 pont)

Ezzel az egyenes egyenlete: $9x + 12y = 9 \cdot 9 + 12 \cdot (-3)$, (1 pont)

azaz: $9x + 12y = 45$ ($3x + 4y = 15$). (1 pont)

- b) A BC oldallal párhuzamos középvonal hossza fele a BC oldal hosszának. (1 pont)

A BC oldal hossza: $\sqrt{12^2 + (-9)^2} = 15$ (1 pont)

A középvonal hossza: **7,5**. (1 pont)

- c) Az ABC háromszög oldalainak hossza: $AB = \sqrt{125}$, $BC = 15$, $AC = \sqrt{50}$. (2 pont)

A C csúcsnál lévő belső szöveget jelölje γ . Alkalmazva a koszinusztételt: (1 pont)

$125 = 225 + 50 - 2 \cdot 15 \cdot \sqrt{50} \cdot \cos \gamma$ (1 pont)

$\cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\approx 0,7071$) (1 pont)

(Mivel $0^\circ < \gamma < 180^\circ$, így) $\gamma = 45^\circ$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

- 27) Tekintsük a koordinátarendszerben adott $A(6;9)$, $B(-5;4)$ és $C(-2;1)$ pontokat!

a) Mekkora az AC szakasz hossza? (2 pont)

b) Írja fel az AB oldalegyenes egyenletét! (4 pont)

c) Igazolja (számítással), hogy az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van! (6 pont)

d) Írja fel az ABC háromszög körülírt körének egyenletét! (5 pont)

Megoldás:

a) $\overline{AC}(-8;-8)$

$$AC = |\overline{AC}| = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2} = \sqrt{128} =$$

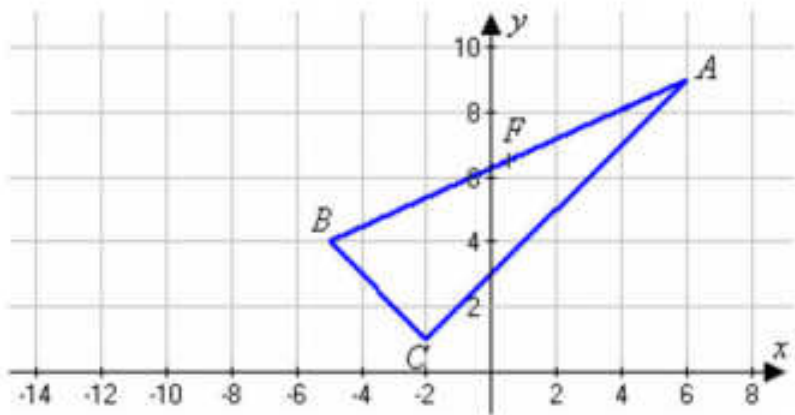
$$8 \cdot \sqrt{2} \approx 11,31 \quad (2 \text{ pont})$$

b) $\overline{AB} = \underline{v}(-11;-5)$

$$\underline{n}(-5;11)$$

$$m = \frac{5}{11}$$

(2 pont)



Az AB egyenes egyenlete: $-5x + 11y = 69$ vagy $y = \frac{5}{11}x + \frac{69}{11}$ (2 pont)

c) A $\overline{CB}(-3;3)$

(1 pont)

$$\overline{CA}(8;8)$$

(1 pont)

A vektorok skaláris szorzata: $\overline{CB} \cdot \overline{CA} = -3 \cdot 8 + 8 \cdot 3 = 0$ (2 pont)

Mivel a két vektor skaláris szorzata 0, a két vektor merőleges egymásra, azaz a C csúcsnál derékszög van. (2 pont)

d) Mivel derékszögű a háromszög, Thalész tétele alapján a körülírt kör középpontja az átfogó felezőpontja, a kör sugara pedig az átfogó fele. (1 pont)

$$F(0,5;6,5)$$
 (2 pont)

A kör sugara: $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{146}}{2} \approx 6,04$ (1 pont)

A kör egyenlete: $(x - 0,5)^2 + (y - 6,5)^2 = 36,5$ (1 pont)

Összesen: 17 pont28) Adottak az $\underline{a}(4;3)$ és $\underline{b}(-2;1)$ vektorok.a) Adja meg az \underline{a} hosszát! (2 pont)b) Számítsa ki az $\underline{a} + \underline{b}$ koordinátáit! (2 pont)**Megoldás:**

a) $|\underline{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (2 pont)

b) $\underline{a} + \underline{b} = (4 + (-2); 3 + 1) = (2; 4)$ (2 pont)

29) Adott a síkon az $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 47 = 0$ egyenletű kör.a) Állapítsa meg, hogy az $A(7;7)$ pont illeszkedik-e a körre! (2 pont)

b) Határozza meg a kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát! (5 pont)

c) Legyenek $A(7;7)$ és $B(0;0)$ egy egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjai. A háromszög C csúcsa rajta van az $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 47 = 0$ egyenletű körön. Számítsa ki a C csúcs koordinátáit! (10 pont)**Megoldás:**

a) $49 + 49 + 14 - 14 - 47 \neq 0$ Tehát a pont nem illeszkedik a körre. (2 pont)

b) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 49$ (3 pont)

$$K = (-1;1) \quad r = 7$$
 (2 pont)

- c) A háromszög harmadik csúcsa az alap felezőmerőlegesén van. (1 pont)
 Az AB oldal felezőpontja: $F(3,5;3,5)$ (1 pont)
 Az AB oldal felezőmerőlegesének normálvektora $\underline{n}(7;7)$ (1 pont)
 A felezőmerőleges egyenlete $x + y = 7$. (1 pont)
 A háromszög harmadik csúcsát a kör és a felezőmerőleges metszéspontja adja: $\left. \begin{array}{l} (x+1)^2 + (y-1)^2 = 49 \\ y = 7 - x \end{array} \right\}$ (1 pont)
 $x^2 - 5x - 6 = 0 \quad x_1 = 6 \quad x_2 = -1$ (3 pont)
 $y_1 = 1 \quad y_2 = 8$ (1 pont)
 $C_1 = (6;1); C_2 = (-1;8)$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

- 30) Adott a koordináta-rendszerben két pont: $A(1;-3)$ és $B(7;-1)$.**
- a) Írja fel az A és B pontokra illeszkedő e egyenes egyenletét! (4 pont)
 b) Számítással igazolja, hogy az A és a B pont is illeszkedik az $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 10$ egyenletű k körre, és számítsa ki az AB húr hosszát! (4 pont)
 Az f egyenesről tudjuk, hogy illeszkedik az A pontra és merőleges az AB szakaszra.
 c) Számítsa ki a k kör és az f egyenes (A -tól különböző) metszéspontjának koordinátáit! (9 pont)

Megoldás:

- a) $\overline{AB}(6;2)$ (1 pont)
 Az e egyenes egy normálvektora: $\underline{n}(1;-3)$, (1 pont)
 egyenlete: $x - 3y = 7 - 3 \cdot (-1) \Rightarrow$ (1 pont)
 $\Rightarrow x - 3y = 10$ (1 pont)
- b) A pont koordinátáinak behelyettesítésével adódik:
 $1^2 + (-3)^2 - 6 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) = 10$, tehát az A pont illeszkedik a k körre. (1 pont)
 B pont koordinátáinak behelyettesítésével adódik:
 $7^2 + (-1)^2 - 6 \cdot 7 - 2 \cdot (-1) = 10$, tehát a B pont illeszkedik a k körre. (1 pont)
 Az AB húr hossza $\sqrt{(7-1)^2 + (-1+3)^2} =$ (1 pont)
 $= \sqrt{40} (\approx 6,32)$. (1 pont)
- c) Az f egyenes egy normálvektora: $\underline{n}(3;1)$ (1 pont)
 Az f egyenes egyenlete $3x + y = 0$. (2 pont)
 A metszéspont koordinátáit a k kör és az f egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásával kapjuk. (1 pont)
 Az f egyenes egyenletéből $y = -3x$. (1 pont)
 Ezt a kör egyenletébe helyettesítve:
 $x^2 + 9x^2 - 6x - 2 \cdot (-3x) = 10$. (1 pont)
 Egyszerűsítés után adódik: $x^2 = 1$. (1 pont)
 Ennek (az 1-től különböző) megoldása $x = -1$. (1 pont)
 Így a keresett pont: $C(-1;3)$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

31) Adott az $A(5;2)$ és a $B(-3;-2)$ pont.

- a) Számítással igazolja, hogy az A és B pontok illeszkednek az $x - 2y = 1$ egyenletű e egyenesre! (2 pont)
- b) Írja fel az AB átmérőjű kör egyenletét! (5 pont)
- c) Írja fel annak az f egyenesnek az egyenletét, amely az AB átmérőjű kört a B pontban érinti! (5 pont)

Megoldás:

- a) $5 - 2 \cdot 2 = 1$ (igaz) (1 pont)
 $(-3) - 2 \cdot (-2) = 1$ (igaz) (1 pont)
- b) A kör középpontja az AB szakasz C felezőpontja, ennek koordinátái $(1;0)$. (1 pont)
A kör sugara az AC szakasz, ennek hossza $\sqrt{20}$. (1 pont)
A kör egyenlete: $(x - 1)^2 + y^2 = 20$. (1 pont)
- c) Az f merőleges az AB szakaszra. (1 pont)
Az f egy normálvektora a \overline{BA} vektor, ennek koordinátái $(8;4)$ (1 pont)
Az f egyenlete: $8x + 4y = 8 \cdot (-3) + 4 \cdot (-2)$ (1 pont)
azaz $8x + 4y = -32$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

32) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $(1;-3)$ ponton és egyik normálvektora a $(8;1)$ vektor! (2 pont)

Megoldás:

$$8x + y = 5$$

(1 pont)
(1 pont)

Összesen: 2 pont

33) Egy kör érinti az y tengelyt. A kör középpontja a $K(-2;3)$ pont. Adja meg a kör sugarát, és írja fel az egyenletét! (3 pont)

Megoldás:

A kör sugara: $r = 2$, (1 pont)
egyenlete: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ (1 pont)
(1 pont)

Összesen: 3 pont

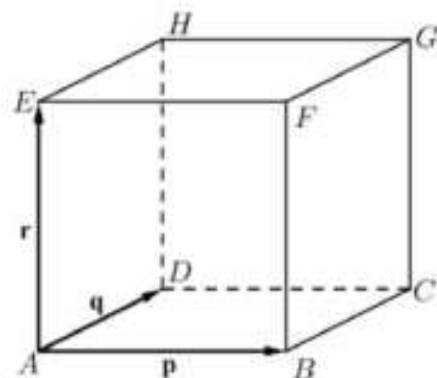
34) Egy kör egyenlete $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$. Adja meg a kör középpontjának koordinátáit és a kör átmérőjének hosszát! (3 pont)

Megoldás:

A kör középpontja $(-3;4)$. (1 pont)
A kör átmérője 10 . (2 pont)

Összesen: 3 pont

35) Az ábrán látható kocka A csúcsából kiinduló élvektorai $\overline{AB} = \underline{p}$; $\overline{AD} = \underline{q}$ és $\overline{AE} = \underline{r}$. Fejezze ki \underline{p} , \underline{q} , és \underline{r} segítségével a \overline{GC} , az \overline{AG} és az \overline{FH} vektorokat! (3 pont)



Megoldás:

$\overline{GC} = -\underline{r}$ (1 pont)

$\overline{AG} = \underline{p} + \underline{q} + \underline{r}$ (1 pont)

$\overline{FH} = \underline{q} - \underline{p}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

36) Az \overline{AB} és \overline{AC} vektorok 120° -os szöget zárnak be egymással, és mindkét vektor hossza 5 egység.

a) Számítsa ki az $\overline{AB} + \overline{AC}$ vektor hosszát! (3 pont)

b) Számítsa ki az $\overline{AB} - \overline{AC}$ vektor hosszát! (4 pont)

A $PRST$ rombusz középpontja a $K(4; -3)$ pont, egyik csúcsa a $T(7; 1)$ pont. Tudjuk, hogy az RT átló hossza fele a PS átló hosszának.

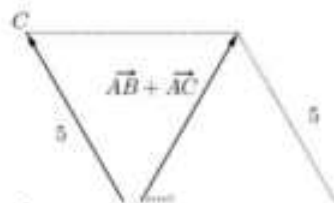
c) Adja meg a P ; az R és az S csúcsok koordinátáit! (10 pont)

Megoldás:

a) Ábra. (1 pont)

Az $\overline{AB} + \overline{AC}$ és az \overline{AB} vektorok egy olyan egyenlő szárú háromszög két oldalát határozzák meg, amelynek egyik szöge 60° -os, így a háromszög szabályos. (1 pont)

Az összegvektor hossza ezért **5 egység**. (1 pont)

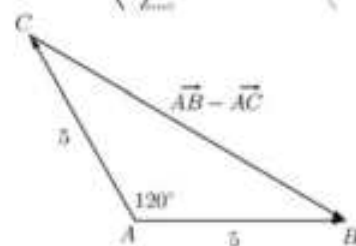


b) Ábrázoljuk a $\overline{AB} - \overline{AC}$ vektort. (1 pont)

Az így kapott háromszögre alkalmazzuk a koszinusztételt. (1 pont)

$$|\overline{AB} - \overline{AC}| = \sqrt{5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ} \approx \mathbf{8,66 \text{ egység.}}$$

(1 pont)



c) A rombusz átlói felezik egymást a K pontban, így a K pont a TR átló felezőpontja. Ezt kihasználva megkaphatjuk az $R(x_R; y_R)$ pont koordinátáit.

$$\frac{7 + x_R}{2} = 4, \text{ illetve } \frac{1 + y_R}{2} = -3. \quad (1 \text{ pont})$$

Ebből $x_R = 1$ és $y_R = -7$, tehát **$R(1; -7)$** . (1 pont)

A $\overline{KT}(3; 4)$ vektort 90° -kal elforgatva megkapjuk a $(-4; 3)$ vektort. (3 pont)

Ennek kétszerese a $\overline{KP}(-8; 6)$ vektor, amelynek ellentettje a $\overline{KS}(8; -6)$ vektor. (2 pont)

A K pont koordinátáihoz adva ezeknek a vektoroknak a megfelelő koordinátáit, megkapjuk a hiányzó csúcsok koordinátáit. (1 pont)

Ebből **$P(-4; 3)$ és $S(12; -9)$** . (2 pont)

Összesen: 17 pont

37) a) Az ABC háromszög két csúcsa $A(-3; -1)$ és $B(3; 7)$, súlypontja az origó. Határozza meg a C csúcs koordinátáit! (3 pont)

- b) Írja fel a hozzárendelési utasítását annak a lineáris függvénynek, amely -3 -hoz -1 -et és 3 -hoz 7 -et rendel! (A hozzárendelési utasítást $x \mapsto ax + b$ alakban adja meg!) (5 pont)
- c) Adott az $A(-3; -1)$ és a $B(3; 7)$ pont. Számítsa ki, hogy az x tengely melyik pontjából látható derékszögben az AB szakasz! (9 pont)

Megoldás:

- a) A háromszög súlypontjának koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepe, a $C(c_1; c_2)$ pont koordinátáira felírhatóak az alábbi egyenletek. (1 pont)

$$0 = \frac{-3 + 3 + c_1}{3}, \text{ amelyre } c_1 = 0 \quad (1 \text{ pont})$$

$$0 = \frac{-1 + 7 + c_2}{3}, \text{ amelyre } c_2 = -6 \quad (1 \text{ pont})$$

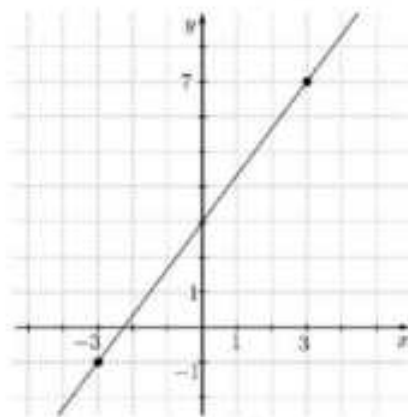
- b) A függvény képe egy egyenes, meredeksége

$$m = \frac{7 - (-1)}{3 - (-3)} = \frac{4}{3}. \quad (2 \text{ pont})$$

A $(3; 7)$ ponton átmenő $\frac{4}{3}$ meredekségű egyenes

egyenlete pedig $y - 7 = \frac{4}{3}(x - 3)$, így a hozzárendelés

szabálya $x \mapsto \frac{4}{3}x + 3$. (3 pont)



- c) Jelöljük a kérdéses pontot P -vel! Mivel a P pont az x tengelyen van, így a második koordinátája 0 . (1 pont)

Ha $P(x; 0)$, akkor $\overline{PA} = (-3 - x; -1)$ és $\overline{PB} = (3 - x; 7)$. (2 pont)

\overline{PA} és \overline{PB} vektorok pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha \overline{PA} és \overline{PB} vektorok skaláris szorzata 0 . (1 pont)

$(-3 - x) \cdot (3 - x) + (-1) \cdot 7 = 0 \Rightarrow x^2 - 9 - 7 = 0$, amelynek gyökei $x_1 = 4$ és $x_2 = -4$. (4 pont)

Tehát a feladatnak két megoldása van, $P_1(4; 0)$ és $P_2(-4; 0)$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

38) Adott két pont a koordinátasíkon: $A(2; 6)$ és $B(4; -2)$.

a) Írja fel az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét! (6 pont)

b) Írja fel az A ponton átmenő, B középpontú kör egyenletét! (4 pont)

Adott az $y = 3x$ egyenletű és az $x^2 + 8x + y^2 - 4y = 48$ egyenletű kör.

c) Adja meg koordinátáikkal az egyenes és a kör közös pontjait! (7 pont)

Megoldás:

- a) Az AB szakasz felezőpontja:

$$F_{AB} = \left(\frac{2+4}{2}; \frac{6+(-2)}{2} \right) = (3; 2) \quad (2 \text{ pont})$$

A felezőmerőleges egy normálvektora: $n = \overline{AB} = (2; -8)$ (2 pont)

Az egyenes egyenlete: $2x - 8y = -10$ (2 pont)

b) $AB = \sqrt{(4-2)^2 + ((-2)-6)^2} = \sqrt{2^2 + (-8)^2} = \sqrt{68}$ (2 pont)

A kör egyenlete: $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 68$ (2 pont)

c) A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x \\ x^2 + 8x + y^2 - 4y = 48 \end{array} \right\} \quad (1 \text{ pont})$$

Az első egyenletből y -t a másodikba helyettesítve $x^2 + 8x + 9x^2 - 12x - 48 = 0$ (1 pont)

$10x^2 - 4x - 48 = 0$ (1 pont)

$x_1 = -2 \quad x_2 = 2,4$ (2 pont)

$y_1 = -6 \quad y_2 = 7,2$ (1 pont)

A közös pontok: $P(-2; -6)$ és $Q(2,4; 7,2)$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

39) A derékszögű koordináta-rendszerben adott a $4x + y = 17$ egyenletű e egyenes, továbbá az e egyenesre illeszkedő $C(2;9)$ és $T(4;1)$ pont. Az

A pont az origóban van.

a) Igazolja, hogy az ATC szög derékszög! (4 pont)

Az A pont e egyenesre vonatkozó tükörképe a B pont.

b) Számítsa ki a B pont koordinátáit! (4 pont)

c) Határozza meg az ABC egyenlő szárú háromszög körülírt köre középpontjának koordinátáit! (9 pont)

Megoldás:

a) Az ATC háromszög oldalainak hossza:

$AT = \sqrt{17}, CT = \sqrt{68}, AC = \sqrt{85}.$ (2 pont)

Mivel $(\sqrt{17})^2 + (\sqrt{68})^2 = (\sqrt{85})^2$ teljesül, (1 pont)

így a (Pitagorasz-tétel megfordítása miatt) a **kérdéses szög valóban derékszög.** (1 pont)

b) Mivel az ATC szög derékszög, ezért az A pontból az e egyenesre bocsátott merőleges talppontja a T pont, (1 pont)

ezért a T pont felezi az AB szakaszt. (1 pont)

Így $B(b_1; b_2)$ koordinátáira $\frac{0+b_1}{2} = 4$ és $\frac{0+b_2}{2} = 1.$ (1 pont)

Tehát **$B(8;2)$** (1 pont)

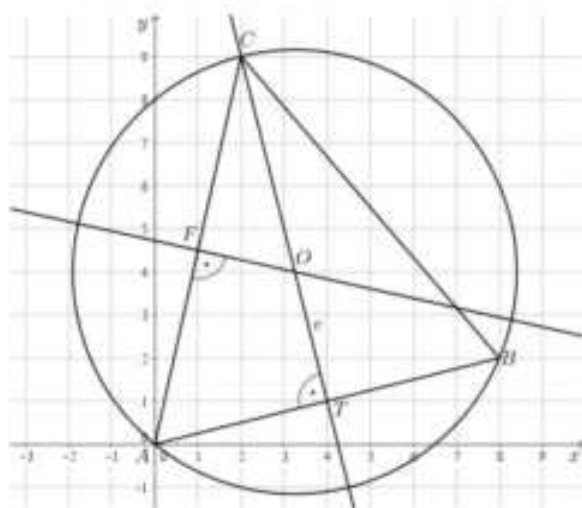
c) Az ABC háromszög körülírt körének középpontja az e egyenesnek és az AC szakasz f felezőmerőlegesének metszéspontja. (1 pont)

Jelölje F az AC szakasz felezőpontját. Ekkor $F(1;4,5)$. (1 pont)

Az f egyenes egy normálvektora: $\overline{AC}(2;9)$. (1 pont)

f egyenlete: $2x + 9y = 42,5.$ (2 pont)

A kör középpontjának $(x;y)$ koordinátáit a következő egyenletrendszer megoldása adja:



$$\left. \begin{array}{l} 2x + 9y = 42,5 \\ 4x + y = 17 \end{array} \right\} \quad (1 \text{ pont})$$

Az első egyenlet 2-szereséből kivonva a második egyenletet:

$$17y = 68. \quad (1 \text{ pont})$$

amiből $y = 4$, majd $x = 3,25$. (1 pont)

Tehát a körülírt kör középpontja: $O(3,25;4)$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

40) Egy számtani sorozat negyedik tagja 4, tizenhatodik tagja -2.

a) Számítsa ki a sorozat első 120 tagjának az összegét! (5 pont)

b) Adott egy szakasz két végpontja: $A(0;4)$ és $B(2;3)$. Írja fel az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét! (5 pont)

c) Egy elsőfokú függvény a 0-hoz 4-et, a 2-höz 3-at rendel. Írja fel a függvény hozzárendelési szabályát! (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Sorozatok 48. feladat*

b) Az AB szakasz felezőpontja: $F_{AB} = \left(\frac{0+2}{2}; \frac{4+3}{2}\right) = (1; 3,5)$ (2 pont)

A felezőmerőleges egyik normálvektora: $\underline{n}(2;-1)$ (1 pont)

Az egyenes normálvektoros egyenlete: $2x - y = -1,5$ (2 pont)

c) A hozzárendelési szabály legyen $x \mapsto mx + b$. (1 pont)

A függvény grafikonja egyenes, melynek meredeksége: $\left(\frac{3-4}{2-0}\right) = -0,5$ (2 pont)

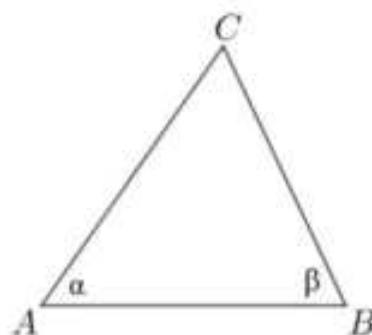
A függvény az y tengelyt 4-nél metszi, így a hozzárendelési szabály: $x \mapsto -0,5x + 4$ (1 pont)

Összesen: 14 pont

41) Adott a derékszögű koordináta-rendszerben a $P(-2;3)$ és a $K(3;15)$ pont.

a) Tükrözzük a P pontot a K pontra. Számítsa ki az így kapott P' pont koordinátáit! (4 pont)

Az ABC háromszög szögeinek nagysága: $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 65^\circ$. A háromszög A , illetve B csúcsához tartozó magasságvonalainak metszéspontját jelölje M . Az M pontot az AB oldal egyenesére tükrözve az M' pontot kapjuk.



b) Határozza meg az $AM'BC$ négyszög belső szögeinek nagyságát!

(8 pont)

Megoldás:

a) A P pont tükörképét jelölje P' . A tükrözés miatt K pont a PP' szakasz felezőpontja, tehát $\overline{PK} = \overline{KP'}$. (1 pont)

A K pont koordinátáiból a P pont koordinátáit kivonva megkapjuk, hogy $\overline{PK} = (5;12)$. (1 pont)

A \overline{PK} koordinátáit a K pont koordinátáihoz hozzáadva kapjuk a P' pont koordinátáit: $P'(8;27)$. (2 pont)

b) *Lásd: Síkgeometria 50. feladat*

Összesen: 12 pont

42) Az f egyenes egyenlete $2x - y = 5$.

- a) Adja meg az f egy normálvektorát! (1 pont)
b) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az f egyenessel, és átmegy a $(2;1)$ ponton! (2 pont)

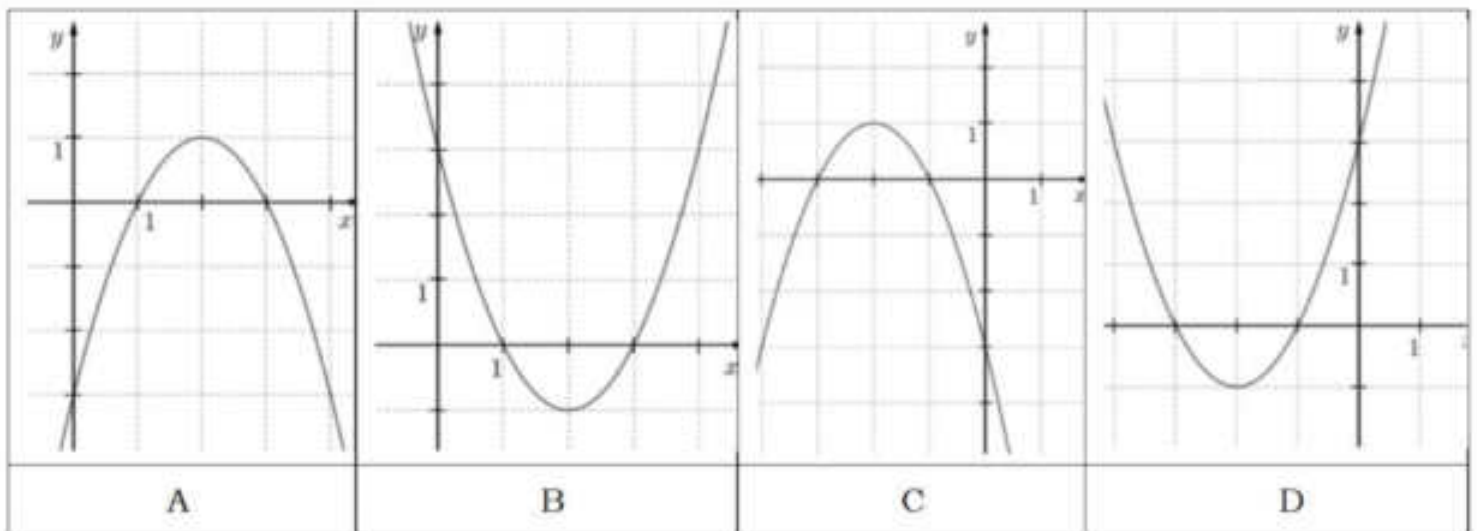
Megoldás:

- a) Az f egyenes normálvektora $\vec{n}_f(2; -1)$ (vagy $\vec{n}_f(-2; 1)$). (1 pont)
b) Két egyenes akkor lesz párhuzamos, ha változóik együtthatói megegyeznek. Az egyenlet jobb oldalára $2 \cdot 2 - 1 = 3$ kerül. Tehát az f egyenessel párhuzamos, $(2;1)$ ponton átmenő egyenes egyenlete: $2x - y = 3$ (2 pont)

Összesen: 3 pont

43) Adott az $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 3$ függvény.

- a) Írja fel két elsőfokú tényező szorzataként az $x^2 + 4x + 3$ kifejezést! (2 pont)
b) A $P(-6, 5; y)$ pont illeszkedik az f grafikonjára. Számítsa ki y értékét! (2 pont)
c) Az alábbi grafikonok közül válassza ki az f függvény grafikonját (karikázza be a megfelelő betűt), és határozza meg az f értékkészletét! (3 pont)



Adott a $g : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 6x + 5$ függvény. Az a három pont, ahol a g grafikonja metszi a koordinátatengelyeket, egy háromszöget határoz meg.

- d) Határozza meg ennek a háromszögnek a területét! (7 pont)

Megoldás:

- a) Lásd: Abszolútértékes és gyökös kifejezések 60. feladat
b) A $-6,5$ -öt behelyettesítve az egyenes egyenletébe megkapjuk az y értékét: $y = (-6,5)^2 + 4 \cdot (-6,5) + 3 = 19,25$ (2 pont)
c) Lásd: Függvények 60. feladat
d) A g értéke 0-ban 5, így az y tengelyt az $A(0; 5)$ pontban metszi a g grafikonja. (2 pont)
Az $x^2 - 6x + 5$ egyenlet megoldásai $x_1 = 1$ és $x_2 = 5$. (2 pont)

Ezért az x tengelyt a g függvény grafikonja a $B(1;0)$ és a $(5;0)$ pontokban metszi. (1 pont)

Az ABC háromszög (BC oldala 4 egység, a hozzá tartozó magasság 5 egység hosszú, így) területe $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ (területegység). (2 pont)

Összesen: 14 pont

44) Egy egyenes egyenlete: $2x + 5y = 18$. Adja meg az egyenes meredekségét! (2 pont)

Megoldás:

Az egyenletet y -ra rendezve: $y = -0,4x + 18$.

Az egyenes meredeksége az x együtthatója, azaz $-0,4$. (2 pont)

Összesen: 2 pont

45) Az $ABCDEFGH$ kocka élhosszúsága 6 cm.

a) Számítsa ki az ábrán látható $ABCDE$ gúla felszínét! (6 pont)

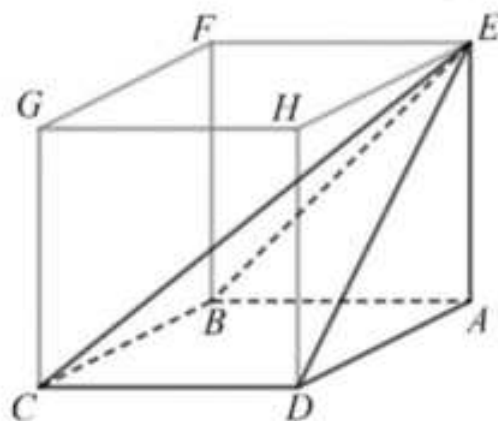
b) Fejezze ki az \overline{EC} vektort az \overline{AB} , az \overline{AD} és az \overline{AE} vektorok segítségével! (3 pont)

Egy 12 cm magas forgáskúp alapkörének sugara 6 cm.

c) Mekkora szöveget zár be a kúp alkotója az alaplappal? (3 pont)

A fenti forgáskúpot két részre vágjuk az alaplappal párhuzamos síkkal. Az alaplappal és a párhuzamos sík távolsága 3 cm.

d) Számítsa ki a keletkező csonkakúp térfogatát! (5 pont)



Megoldás:

a) Lásd: Térgeometria 43. feladat

b) $\overline{EC} = \overline{EA} + \overline{AD} + \overline{DC}$ (1 pont)

$\overline{EA} = -\overline{AE}$ és $\overline{DC} = \overline{AB}$ (1 pont)

$\overline{EC} = -\overline{AE} + \overline{AD} + \overline{AB}$ (1 pont)

Alternatív megoldás:

$\overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE}$ (1 pont)

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$ (1 pont)

$\overline{EC} = \overline{AB} + \overline{AD} - \overline{AE}$ (1 pont)

c) Lásd: Trigonometria 27. feladat

d) Lásd: Térgeometria 43. feladat

Összesen: 17 pont

46) Egy háromszög csúcsai a koordináta rendszerben $A(-8; -12)$, $B(8; 0)$ és $C(-1; 12)$. Az A pontnak a B pontra vonatkozó tükörképe a D pont.

- a) Számítsa ki a D pont koordinátáit! (3 pont)
- b) Írja fel az ABC háromszög B csúcsán áthaladó magasságvonalának egyenletét! (4 pont)
- c) Igazolja, hogy az ABC háromszög B csúcsánál derékszög van! (4 pont)
- Az A , B és C pontokat szeretnénk a kék, zöld és sárga színekkel színeznünk úgy, hogy mindhárom pontot színezzük valamelyik színnel, de egy színezésen belül nem használjuk fel mindhárom színt.
- d) Hány különböző színezés lehetséges ezekkel a feltételekkel? (6 pont)

Megoldás:

a) A B pont az AD szakasz felezőpontja, ezért ha $D(d_1; d_2)$, akkor $8 = \frac{d_1 + (-8)}{2}$,
amiből $d_1 = 24$. (1 pont)

Ugyanígy $0 = \frac{d_2 + (-12)}{2}$, amiből $d_2 = 12$. (1 pont)

Tehát $D(24; 12)$. (1 pont)

b) A háromszög magasságvonala a csúcson áthaladó, a szemközti oldal egyenesére merőleges egyenes. (1 pont)

A B csúcson átmenő magasságvonal egyik normálvektora $\overline{AC} = (7; 24)$, (1 pont)

tehát egyenlete $7x + 24y = 7 \cdot 8 + 24 \cdot 0 = 56$. (1 pont)

c) A háromszög oldalainak hossza:

$$AB = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20, \quad BC = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15, \quad CA = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25. \quad (2 \text{ pont})$$

Mivel $15^2 + 20^2 = 25^2$ ezért (a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt) a háromszög valóban derékszögű (és a derékszög a B csúcsnál van). (2 pont)

d) Lásd: Kombinatorika 46. feladat

Összesen: 17 pont

47) Tekintsük az A , B , C , D és E pontokat egy gráf csúcsainak.

a) Egészítse ki élekkel a fenti ábrát úgy, hogy a kapott gráfban minden csúcs fokszáma 2 vagy 3 legyen! (2 pont)

b) Lehet-e olyan 5 csúcsú gráfot rajzolni, amelyben minden csúcs fokszáma pontosan 3? (3 pont)

Az A , B , C , D pontok egy paralelogrammát alkotnak, az E pont az átlók metszéspontja.

c) Fejezze ki az \overline{AB} vektort a \overline{DA} és \overline{DE} vektorok segítségével! (3 pont)

Egy $ABCD$ paralelogrammát elhelyeztünk a koordináta-rendszerben. Tudjuk, hogy az AB egyenes egyenlete $2x - 5y = -4$, az AD egyenes egyenlete pedig $3x - 2y = -6$. A C pont koordinátái $(5; 5)$, a B pont első koordinátája 3.

d) Határozza meg a paralelogramma A , B és D csúcsának koordinátáit! (9 pont)

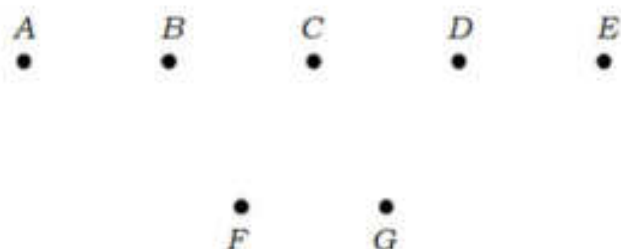
Megoldás:

a) Lásd: Logika, gráfok 42. feladat

- b) *Lásd: Logika, gráfok 42. feladat*
- c) $\overline{AD} = -\overline{DA}$ (1 pont)
 $\overline{DB} = 2 \cdot \overline{DE}$ (1 pont)
 $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} = -\overline{DA} + 2 \cdot \overline{DE}$ (1 pont)
- d) A B pont első koordinátáját az AB egyenes egyenletébe helyettesítve $2 \cdot 3 - 5y = -4$. (1 pont)
 Így $y = 2$, azaz $B(3; 2)$ az egyik csúcs (1 pont)
 Az A pont az AB és AD egyenesek metszéspontja, ezért koordinátáit a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása adja meg. Az első egyenletből x -et kifejezve és a második egyenletbe helyettesítve:
 $3 \cdot \frac{5y - 4}{2} - 2y = -6$. (2 pont)
 Az egyenletet rendezve: $y = 0$. (1 pont)
 Innen $x = -2$, tehát $A(-2; 0)$ a másik csúcs. (1 pont)
 Az AC szakasz felezőpontja $E(1,5; 2,5)$. (1 pont)
 Mivel $1,5 = \frac{d_1 + 3}{2}$ és $2,5 = \frac{d_2 + 2}{3}$, így a $D(d_1; d_2)$ pont koordinátái $(0; 3)$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

48) Az ábrán szereplő A, B, C, D és E pontok egy olyan egyenesre illeszkednek, amely párhuzamos az F és G pontokra illeszkedő egyenessel.



a) **Hány olyan különböző egyenes létezik, amely az ábrán lévő pontok közül legalább kettőre illeszkedik?**

(3 pont)

b) **Hány olyan háromszög van, amelynek a csúcsait az ábrán szereplő 7 pont közül választjuk ki? (Két háromszöget különbözőnek tekintünk, ha legalább az egyik csúcsukban eltérnek egymástól.)**

(5 pont)

Egy háromszög csúcsai: $K(-1; 5), L(1; 1), M(5; 3)$.

c) **Igazolja, hogy a háromszög L -nél lévő szöge derékszög!**

(4 pont)

d) **Írja fel a háromszög körülírt körének az egyenletét!**

(5 pont)

Megoldás:

- a) *Lásd: Kombinatorika 49. feladat*
- b) *Lásd: Kombinatorika 49. feladat*
- c) Jelöljük az L és M pontokat összekötő vektort \vec{k} -val, az M és K pontokat összekötőt \vec{l} -lel, a K és L pontokat összekötőt pedig \vec{m} -mel.
 $\vec{k}(4; 2)$, hossza $|\vec{k}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$. (1 pont)
 $\vec{l}(6; -2)$, hossza $|\vec{l}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40}$. (1 pont)
 $\vec{m}(-2; 4)$, hossza $|\vec{m}| = \sqrt{(-2)^2 + 4} = \sqrt{20}$. (1 pont)

$\sqrt{20}^2 + \sqrt{20}^2 = \sqrt{40}^2$, tehát a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt az L -nél valóban derékszög van. \Rightarrow **QED** (1 pont)

Alternatív megoldás:

Jelöljük az L és M pontokat összekötő vektort \vec{k} -val, a K és L pontokat összekötőt pedig \vec{m} -mel.

$\vec{k}(4;2)$ és $\vec{m}(-2;4)$. (2 pont)

Skaláris szorzatuk: $-2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 0$. (1 pont)

A két vektor merőleges egymásra, tehát L -nél valóban derékszög van. \Rightarrow **QED** (1 pont)

d) A Thalész-tétel, illetve a megfordítása miatt derékszögű háromszögben a körülírt kör középpontja az átfogó felezőpontja, sugara pedig az átfogó fele. (1 pont)

Az átfogó felezőpontja: $F_{KM} = \left(\frac{-1+5}{2}; \frac{5+3}{2} \right) = (2;4)$. (1 pont)

$r = \frac{KM}{2} = \frac{\sqrt{6^2 + (-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$ (1 pont)

A körülírt kör egyenlete: $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

49) Egy kör középpontja a $K(3;2)$ pont, a kör átmegy a $P(-1;5)$ ponton. Adja meg a kör sugarának hosszát, és írja fel a kör egyenletét! (4 pont)

Megoldás:

A kör sugarának hossza: $r = \sqrt{(-1-3)^2 + (5-2)^2} = 5$. (2 pont)

A kör egyenlete: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$. (2 pont)

Összesen: 4 pont

50) Egy háromszög csúcsai a koordináta-rendszerben: $A(5;6)$, $B(4;2)$ és $C(8;2)$.

a) Számítsa ki a háromszög A -nál lévő belső szögét! (6 pont)

b) Írja fel a háromszög B -re illeszkedő magasságvonalának egyenletét, és számítsa ki a háromszög M magasságpontjának koordinátáit! (7 pont)

Az ABC háromszöget a B pontból középpontosan a kétszeresére nagyítjuk, így az $A'B'C'$ háromszöget kapjuk.

c) Adja meg az $A'B'C'$ háromszög csúcsainak koordinátáit! (4 pont)

Megoldás:

a) A háromszög AB oldalának hossza a két pont távolságára vonatkozó összefüggés alkalmazásával: $AB = \sqrt{(5-4)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{17}$. (1 pont)

Ugyanígy $AC = \sqrt{(5-8)^2 + (6-2)^2} = 5$ és $BC = \sqrt{(4-8)^2 + (2-2)^2} = 4$. (2 pont)

Jelöljük az ABC háromszögben a kérdéses szöget α -val, és írjuk fel a

koszinusztételt: $16 = 17 + 25 - 2 \cdot \sqrt{17} \cdot 5 \cdot \cos \alpha$.

(1 pont)

Ebből $\cos \alpha \approx 0,6306$.

(1 pont)

Így $\alpha \approx 50,91^\circ$.

(1 pont)

Alternatív megoldás:

Az ábra jelöléseit használjuk. A keresett szög $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

$BT = 1, TC = 3, AT = 4$. (1 pont)

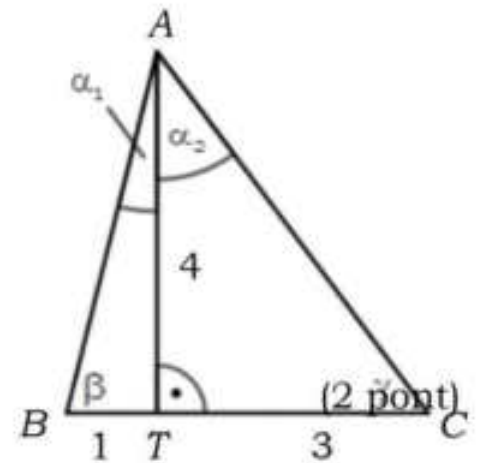
Az ABT háromszögben $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{4}$. (1 pont)

Így $\alpha_1 \approx 14,04^\circ$. (1 pont)

Az ATC háromszögben $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{3}{4}$. (1 pont)

Így $\alpha_2 \approx 36,87^\circ$. (1 pont)

Tehát $\alpha = 14,04^\circ + 36,87^\circ = 50,91^\circ$. (1 pont)



b) A kérdéses magasságvonal áthalad a B ponton, és egy normálvektora az $\vec{b}(3;4)$ vektor.

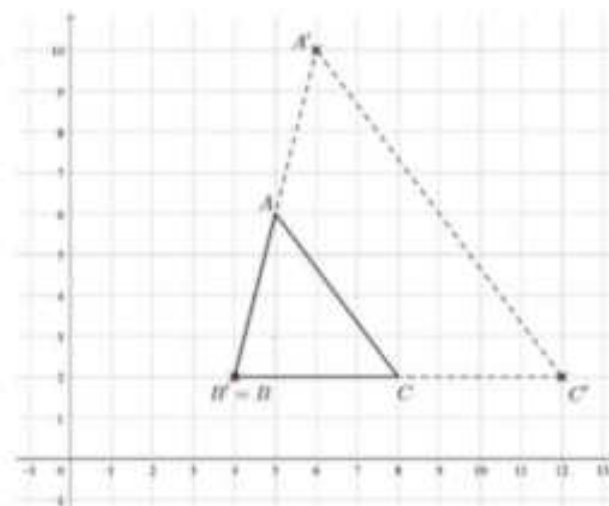
A magasságvonal egyenlete $3x - 4y = 3 \cdot 4 + (-4) \cdot 2$, azaz $3x - 4y = 4$. (2 pont)

A magasságpont rajta van az A -ra illeszkedő magasságvonalon, melynek egyenlete $x = 5$, így első koordinátája 5. (1 pont)

Második koordinátáját a B -ből induló magasságvonal egyenletéből az $x = 5$ helyettesítéssel kapjuk: $y = 2,75$. (1 pont)

Tehát $M(5;2,75)$. (1 pont)

c) Ábra. (1 pont)



A B pont képe önmaga, azaz $B'(4;2)$. (1 pont)

$C'(12;2)$. (1 pont)

$A'(6;10)$. (1 pont)

Összesen: 17 pont